Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás

Az olyan a mozgást, amelyeknél a pontszerű test mozgásának pályája egyenes és a gyorsulás állandó nagyságú, egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnak nevezzük. Mivel a pálya egyenes, az elmozdulás-, a sebesség- és a gyorsulásvektor minden pillanatban a pálya egyenesébe esik. A mozgás közben a gyorsulás minden pillanatban ugyanakkora, így a mozgás bármely szakaszán az átlaggyorsulás is ugyanekkora. Eszerint *egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál az átlaggyorsulás megegyezik a gyorsulással*, azaz:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a} = \text{állandó}\,. \qquad (1)$$

Az „egyenletesen változó” jelző arra utal, hogy a sebesség nagysága egyenletesen változik, azaz a sebességváltozás egyenesen arányos az idővel. Az előzőek szerint ugyanis

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \text{állandó}\,.$$

Ebből az átlaggyorsulás definíciója alapján:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \text{állandó}\,,$$

ez pedig éppen azt jelenti, hogy az *egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál a sebességváltozás egyenesen arányos a sebességváltozás időtartamával.*

A következőkben meghatározzuk, hogy az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebessége hogyan függ az időtől. Az (1) összefüggést felírva:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\,.$$

Az átlaggyorsulás definíciója alapján:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{a}\,.$$

Mindkét oldalt Δt-vel szorozva:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \cdot \Delta t\,. \qquad (2)$$

Ha a mozgást az időmérés kezdetétől ($t_0 = 0$) egy tetszőleges t időpontig vizsgáljuk, akkor:

$$\Delta t = t - t_0 = t - 0 = t\,.$$

Ha a test kezdeti sebességét a vizsgált időtartam kezdetén $\boldsymbol{v}_0$, végén pedig $\boldsymbol{v}$ jelöli, akkor a sebességváltozás:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\,.$$

Ezeket a (2) képletbe helyettesítve:

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{a} \cdot t\,.$$

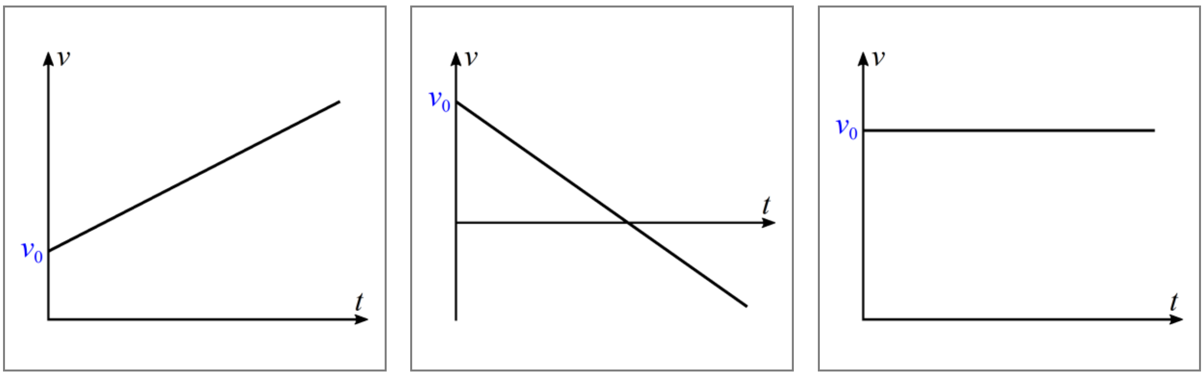
Ebből az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebessége:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a} \cdot t\,.$$

Az egyenes vonalú mozgásoknál látottaknak megfelelően célszerű a mozgást olyan koordináta-rendszerben vizsgálni, amelynek X tengelye a kezdősebesség irányába mutat. (Ha a test álló helyzetből indul, azaz nincs kezdősebessége, akkor válasszunk olyan koordinátarendszert, amelynek az X tengelye a gyorsulás irányába mutat!) Ilyen rendszerben *az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebességének X koordinátája*:

$$v = v_0 + a \cdot t\,. \qquad (3)$$

Ha a sebesség–idő közti összefüggést grafikusan ábrázoljuk, akkor minden esetben egy egyenest kapunk, vagyis *az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test sebessége lineáris függvénye az időnek.*



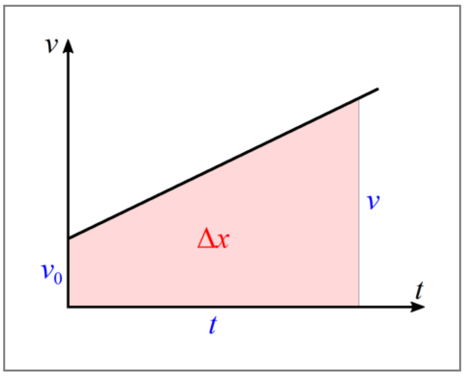
Az egyenes és a sebességtengely metszéspontját a kezdősebesség határozza meg, az egyenes meredeksége pedig a gyorsulástól függ. Ha a gyorsulás a kezdősebességgel megegyező irányú, akkor a függvény *szigorúan monoton növekvő*, ha a kezdősebességgel ellentétes irányú, akkor *szigorúan monoton csökkenő*. (A sebesség ilyenkor negatívvá is válhat, ami azt jelzi, hogy a sebesség iránya a kezdeti sebességgel ellentétessé vált.) Ha a gyorsulás nulla, akkor a sebesség állandó, mivel (3) alapján

$$v = v_0 + a \cdot t = v_0 + 0 \cdot t = v_0 = \text{állandó}\,.$$

A mozgás ebben az esetben olyan *egyenes vonalú, egyenletes mozgás*, melynek sebessége megegyezik a kezdősebességgel. Emiatt a mozgás sebesség–idő grafikonját megrajzolva az időtengellyel párhuzamos egyenest kapunk.

A továbbiakban meghatározzuk, hogy az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test elmozdulása, illetve a megtett út hogyan függ az időtől. A fenti három grafikonnak megfelelően három esetet különböztethetünk meg.

Elsőként azt az esetet vizsgáljuk, amelynél a test sebességének az iránya nem változik meg. Tudjuk, hogy ilyenkor a sebesség–idő grafikon függvénygörbéje és a t tengely közti síkidom területe felel meg az elmozdulásnak. Az ábra alapján belátható, hogy

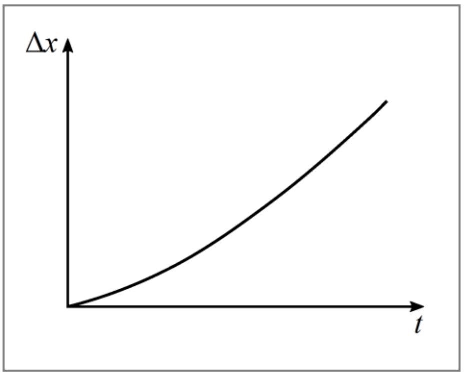


$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t\,.$$

Az elmozdulás kiszámítására ez a képlet is gyakran hasznos lehet, de érdemes a (3) összefüggés felhasználásával átalakítani:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2\,.$$

Eszerint az elmozdulás:



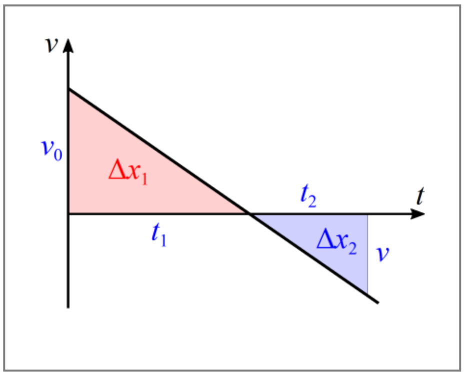
$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2\,.$$

Mivel elmozdulás és az idő közti kapcsolat egy másodfokú függvénnyel írható le, az elmozdulás–idő grafikon függvénygörbéje parabola. (A parabola tengelypontja azonban nem az origóban van.)

Mivel ilyenkor a test sebességének iránya nem változik meg, az út ugyanakkora, mint az elmozdulás, azaz:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 .$$

Második esetben, ha a test sebessége a kezdősebességgel ellentétes irányúvá válik, akkor az elmozdulásnak a két háromszög területének előjeles összege felel meg. Mivel most v negatív, így a második háromszög befogóinak hossza $-v$ és t_2. Az elmozdulások az ábra alapján:



$$\Delta x = \frac{v_0 \cdot t_1}{2} - \frac{-v \cdot t_2}{2} = \frac{v_0 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{2} .$$

Az átlaggyorsulás definíciója alapján a t_1 és t_2 időtartamok:

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v_1}{t_1} = \frac{0 - v_0}{t_1} = -\frac{v_0}{t_1} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = -\frac{v_0}{a} ,$$

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v_2}{t_2} = \frac{v - 0}{t_2} = \frac{v}{t_2} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{v}{a} .$$

Ezeket az előző összefüggésbe helyettesítve:

$$\Delta x = \frac{v_0 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2}{2} = \frac{-\frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{a}}{2} = \frac{-v_0^2 + v^2}{2 \cdot a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} .$$

A számlálót szorzattá alakítva, majd a gyorsulás definícióját felhasználva:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{(v + v_0) \cdot (v - v_0)}{2 \cdot a} = \frac{v + v_0}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v + v_0}{2} \cdot t ,$$

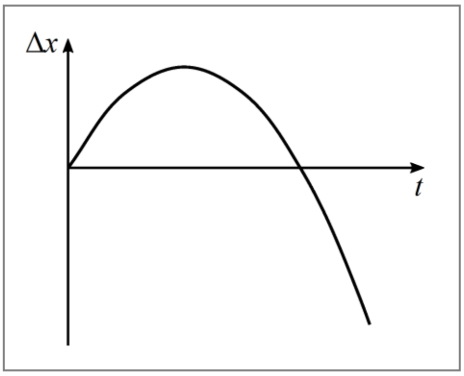
azaz

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t ,$$

Ebből pedig a $v = v_0 + a \cdot t$ helyettesítéssel, a korábban látott módon az előzővel megegyező alakú összefüggést kapunk az elmozdulásra:

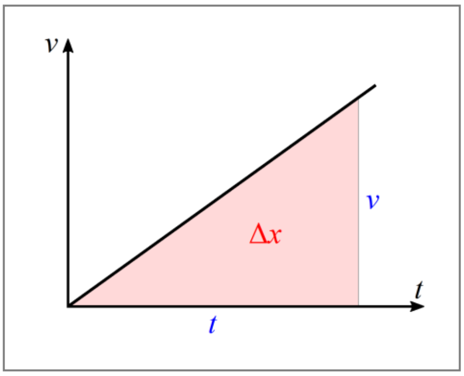
$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 .$$

A másodfokú függvénykapcsolat miatt az elmozdulás–idő–grafikon függvénygörbéje most is parabola. A gyorsulás azonban negatív, ezért a parabola „lefelé nyitott". Ezzel összhangban a t értékétől függően *az elmozdulás pozitív, nulla vagy akár negatív is lehet*. Például egy erkélyről függőlegesen feldobott labda elmozdulása a mozgás első szakaszában pozitív; amikor újra az erkély magasságába ér, akkor nulla; a földre érkezéskor pedig negatív.



A test által megtett utat ebben az esetben úgy határozhatjuk meg, hogy a mozgást olyan szakaszokra bontjuk, amelyeken a test egyirányú mozgást végez. Az egyes szakaszokon az út megegyezik az elmozdulás hosszával, így *a teljes utat ezen elmozdulások nagyságának összegeként számíthatjuk ki*.

Végezetül, ha az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végző test álló helyzetből indul, akkor $v_0 = 0$. A korábbiaknak megfelelően ilyenkor a mozgást vizsgáljuk olyan koordináta-rendszerben, amelynek X tengelye a gyorsulás irányába mutat! Ekkor a test elmozdulásának egy derékszögű háromszög területe felel meg, azaz:



$$\Delta x = \frac{v}{2} \cdot t \,.$$

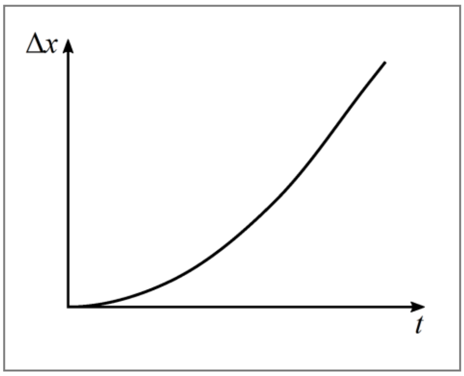
Ebből a $v = v_0 + a \cdot t$ helyettesítéssel:

$$\Delta x = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{0 + a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{a}{2} \cdot t^2 \,,$$

azaz az elmozdulás

$$\Delta x = \frac{a}{2} \cdot t^2 \,.$$

A másodfokú függvénykapcsolat miatt az elmozdulás–idő grafikon függvénygörbéje ilyenkor is parabola, de a parabola tengelypontja most az origóban van.



Mivel ebben az esetben a sebesség iránya a mozgás folyamán nem változik, az út megegyezik az elmozdulás nagyságával, azaz:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 .$$

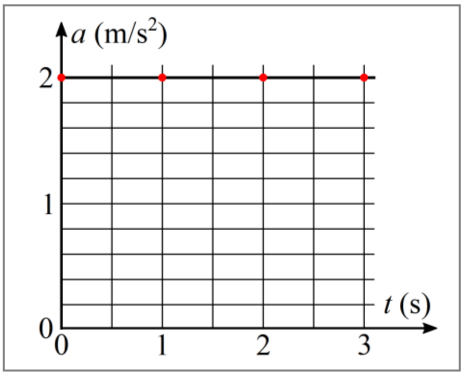
Ezt az összefüggést *négyzetes úttörvénynek* nevezzük.

Példák

1. Egy test álló helyzetből indulva egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végez, gyorsulása 2 m/s^2. Rajzoljuk meg a mozgás első három másodperces szakaszához tartozó gyorsulás–idő, a sebesség–idő és az elmozdulás–idő grafikonokat!

Megoldás:

A gyorsulás állandó, azaz minden pillanatban 2 m/s^2, ezért a gyorsulás–idő grafikon függvénygörbéje a t tengellyel párhuzamos egyenes. A grafikonon a 0, 1, 2 és 3 másodperchez tartozó gyorsulásértékeket külön is megjelöltük.



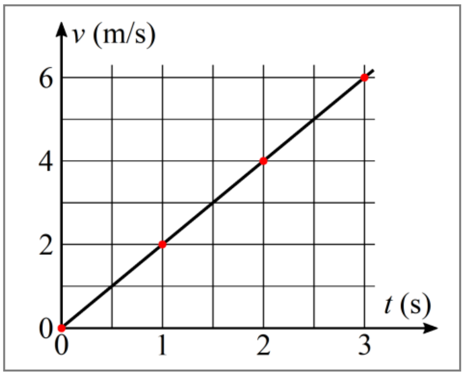
A test álló helyzetből indul, azaz $v_0 = 0$. Más időpontokban a sebesség a $v = a \cdot t$ összefüggés alapján számítható ki, ezért a sebesség–idő grafikon „függvénygörbéje” az origón átmenő egyenes. A fentiek alapján a 0, 1, 2 és 3 másodperchez tartozó sebességek:

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = a \cdot t_1 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1\,\mathrm{s} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_2 = a \cdot t_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{s} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_3 = a \cdot t_3 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3\,\mathrm{s} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



Ezeket az értékeket a sebesség–idő grafikon külön is bejelöltük.

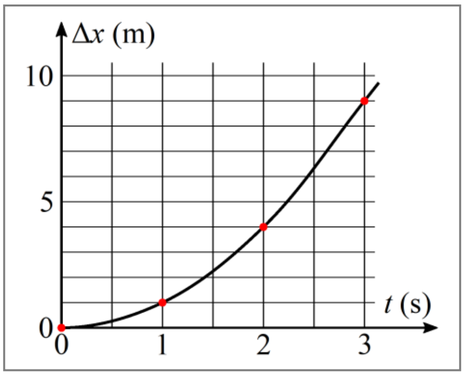
Az elmozdulás a $\Delta x = \frac{a}{2} \cdot t^2$ összefüggés alapján számítható ki. Az elmozdulás–idő grafikon függvénygörbéje olyan parabola, amelynek tengelypontja az origóban van. A képlet alapján a 0, 1, 2 és 3 másodperchez tartozó elmozdulások:

$$\Delta x_0 = 0$$

$$\Delta x_1 = \frac{a}{2} \cdot t_1^2 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2 = 1\,\mathrm{m}$$

$$\Delta x_2 = \frac{a}{2} \cdot t_2^2 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 4\,\mathrm{m}$$

$$\Delta x_3 = \frac{a}{2} \cdot t_3^2 = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (3\,\mathrm{s})^2 = 9\,\mathrm{m}$$

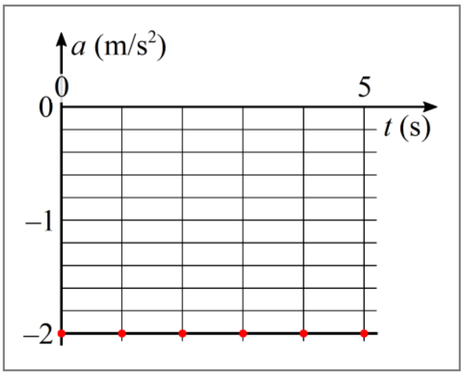


Ezeket az értékeket az elmozdulás–idő grafikonon külön is bejelöltük.

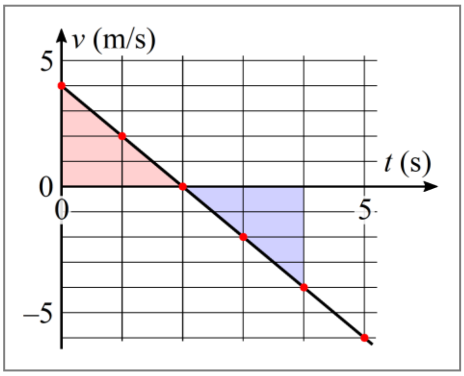
2. Egy test 4 m/s kezdősebességgel indulva egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végez. Gyorsulása 2 m/s^2 nagyságú és ellentétes a kezdősebesség irányával. Rajzoljuk meg a mozgás első öt másodperces szakaszához tartozó gyorsulás–idő, a sebesség–idő és az elmozdulás–idő grafikonokat!

Megoldás:

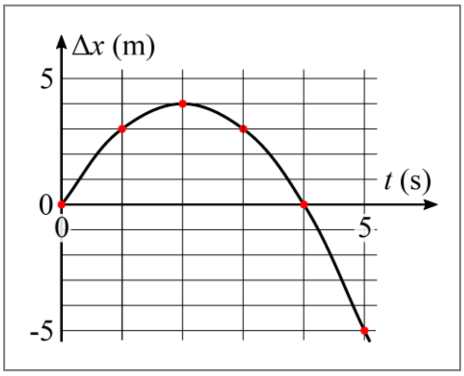
A gyorsulás állandó, de ellentétes irányú a sebességgel és így az X tengellyel is. Emiatt a gyorsulás minden pillanatban –2 m/s^2, így a gyorsulás–idő grafikon függvénygörbéje a t tengellyel párhuzamos egyenes. A grafikonon a gyorsulás másodpercenkénti értékeit külön is megjelöltük.



A sebesség a $v = v_0 + a \cdot t$ összefüggés alapján határozható meg. Ennek megfelelően a sebesség–idő grafikon „függvénygörbéje” egy egyenes. Mivel az a gyorsulás negatív, a függvény szigorúan monoton csökkenő, és egy idő után a sebesség nullává, majd negatívvá válik. A grafikonon a sebesség másodpercenkénti értékeit külön is megjelöltük.



Az elmozdulás a $\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ képlet alapján számítható ki. Az elmozdulás–idő grafikon függvénygörbéje egy olyan „lefelé nyitott” parabola, amelynek tengelypontja nem az origóban van. A grafikonon az elmozdulás másodpercenkénti értékeit külön is megjelöltük.



A grafikonok alapján a megállapítható:

- Az első 2 másodpercben a test sebessége egyre csökken, elmozdulása azonban folyamatosan növekszik, azaz a test távolodik a kiindulási helytől.
- A $t = 2$ s időpontban a sebességfüggvénynek zérushelye, az elmozdulásfüggvénynek maximuma van. A test ekkor egy pillanatra megáll, de ekkor van legmesszebb a kiindulási helytől (ebben az irányban).
- Ezután a sebesség nagysága folyamatosan nő, iránya azonban ettől kezdve végig ellentétes a kezdősebességgel. Az elmozdulás eközben fokozatosan csökken.
- A $t = 4$ s időpontban a sebesség nagysága ugyanakkora, mind az induláskor. Az elmozdulás ebben a pillanatban éppen nulla.
- Ezt követően a sebesség nagysága tovább növekszik, az elmozdulás nagysága is folyamatosan nő, de negatív értékeket vesz fel. (Az elmozdulás ezen a szakaszon ellentétes a kezdősebességgel és az X tengely irányával.)

3. Egy 600 m/s sebességű lövedék 36 cm mélyen fúródott be a fába. Mekkora volt a gyorsulása és mennyi idő alatt állt meg, ha egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgást végzett?

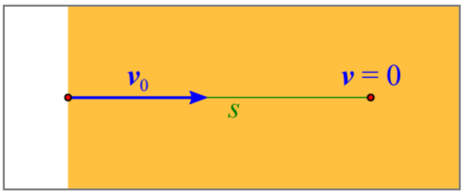
Megoldás:

$v_0 = 600\,\text{m/s}$

$s = 36\,\text{cm} = 0{,}36\,\text{m}$

$a = ?$

$t = ?$



A lövedék útjára vonatkozó összefüggésből a fában történő mozgás időtartama kifejezhető:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{2 \cdot s}{v_0 + v}.$$

A lövedék megállt a fában, ezért v = 0. Ezt felhasználva a keresett időtartam:

$$t = \frac{2 \cdot s}{v_0 + v} = \frac{0{,}72\,\mathrm{m}}{600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}0012\,\mathrm{s}.$$

A gyorsulás egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásnál ugyanakkora, mint az átlaggyorsulás, ezért:

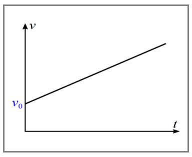
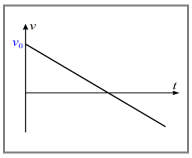
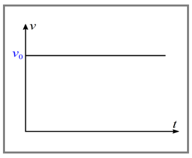
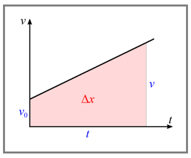
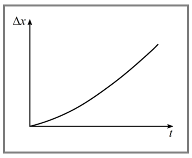
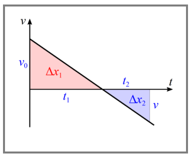
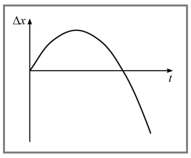
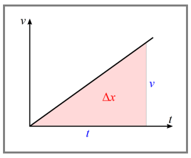
$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t - 0} = -\frac{v_0}{t}.$$

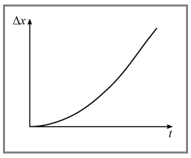
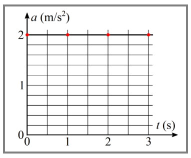
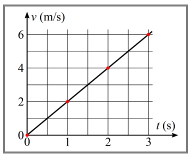
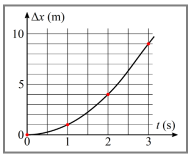
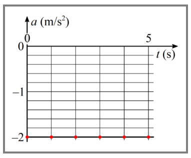
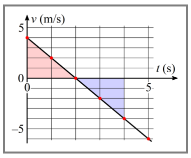
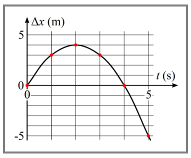
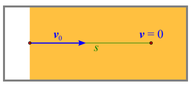
Az ismert adatokat behelyettesítve:

$$a = -\frac{v_0}{t} = -\frac{600\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}0012\,\mathrm{s}} = -500\,000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

A lövedék 0,0012 másodperc alatt áll meg, gyorsulása pedig $500\,000\,\mathrm{m/s}^2$ nagyságú és a kezdősebességgel ellentétes irányú.

Képek jegyzéke

	**Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás *v*(*t*) grafikonja (*a* > 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0055.svg
	**Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás *v*(*t*) grafikonja (*a* < 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0056.svg
	**Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás *v*(*t*) grafikonja (*a* = 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0057.svg
	**Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás elmozdulása (*a* > 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0058.svg
	**Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $\Delta x(t)$ grafikonja (*a* > 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0059.svg
	**Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás elmozdulása (*a* < 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0060.svg
	**Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $\Delta x(t)$ grafikonja (*a* < 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0061.svg
	**Az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás elmozdulása (v_0 = 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0062.svg

	**Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás $\Delta x(t)$ grafikonja (v_0 = 0)** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0063.svg
	**Gyorsulás–idő grafikon az 1. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0064.svg
	**Sebesség–idő grafikon az 1. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0065.svg
	**Elmozdulás–idő grafikon az 1. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0066.svg
	**Gyorsulás–idő grafikon a 2. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0067.svg
	**Sebesség–idő grafikon a 2. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0068.svg
	**Elmozdulás–idő grafikon a 2. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0069.svg
	**Rajz a 3. példához** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0070.svg

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.