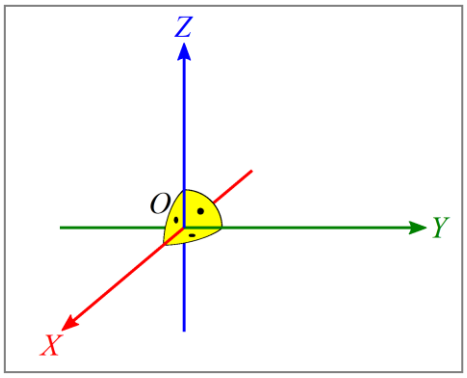
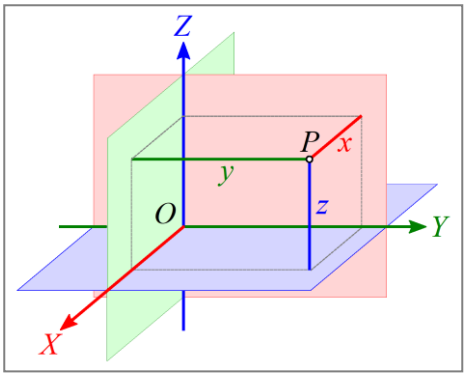
Koordináta-rendszerek

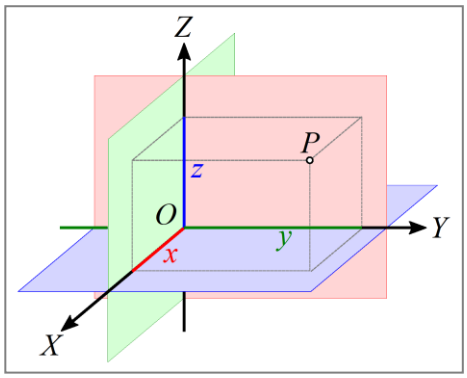
A tér pontjainak helyét megadhatjuk számokkal, amelyek bizonyos alapelemekhez (bázishoz) viszonyítva határozzák meg a pont helyét. Ezeket az alapelemek alkotják a koordináta-rendszert, a pont helyét megadó számokat a koordinátáknak nevezzük.



Általában a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert használjuk. Ebben a bázis három egymásra merőleges, közös kezdőpontú számegyenes: X, Y és Z. Ezeket a számegyeneseket a koordináta-rendszer tengelyeinek, a közös kezdőpontot origónak nevezzük és O-val jelöljük. A *koordináta-rendszer jobbsodrású* vagy *balsodrású* lehet aszerint, hogy az origóból kiinduló, az X, Y és Z tengelyek mentén pozitív irányába mutató **i**, **j** és **k** egységvektorok milyen vektorrendszert alkotnak. Egy tetszőleges P pont Descartes-féle koordinátáin a tengelyek által meghatározott síkoktól mért előjeles távolságát értjük:

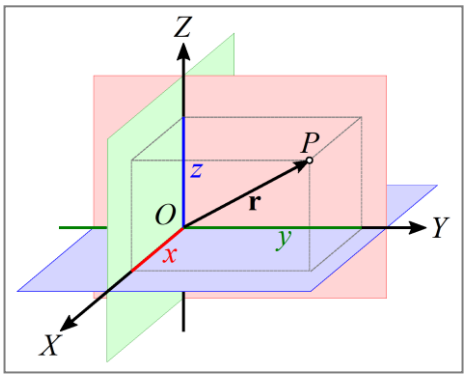


- x a P pont előjeles távolsága az $[YZ]$ síktól,
- y a P pont előjeles távolsága az $[XZ]$ síktól,
- z a P pont előjeles távolsága az $[XY]$ síktól.



A koordináták latin eredetű elnevezései: ordináta (x), abszcissza (y) és applikáta (z). A P pont helyzete tehát három valós számból álló, rendezett számhármassal (x, y, z) adható meg. A koordinátákat rajzban gyakran a tengelyeken tüntetik fel, könnyen belátható, hogy a kétféle megadási mód egyenértékű.

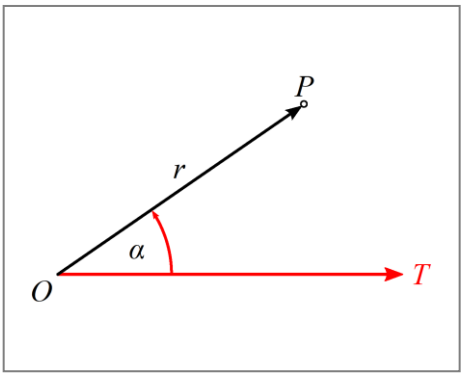
A P pont helyét a három koordinátája helyett egy olyan vektorral is megadhatjuk, amelynek a kezdőpontja az origóban van, végpontja pedig a P pont. Ezt az vektort a P pont helyvektorának nevezzük. A helyvektor jele általában $\mathbf{r}$. Egyszerűen belátható, hogy a P ponthoz tartozó helyvektor koordinátái megegyeznek a P pont koordinátáival. A Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával bizonyítható a helyvektor abszolútértéke és a koordináták közötti összefüggés:



$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Gyakran csak egyetlen sík pontjait kell leírni, vizsgálni, ilyenkor a koordináta-rendszert úgy érdemes megválasztani, hogy az [XY] sík egybeessen az adott síkkal. Ekkor a sík minden pontjának a Z koordinátája 0 lesz, emiatt ez a koordináta és a Z tengely akár el is hagyható.

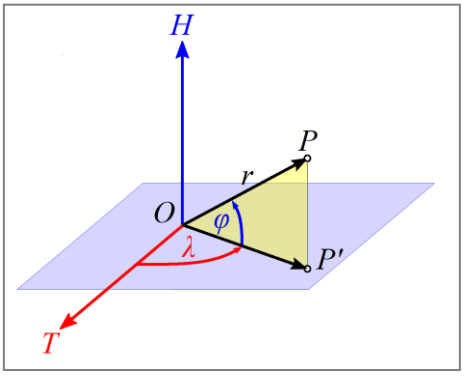
A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer mellett a sík pontjainak leírására más koordináta-rendszerek is használhatók. Ezek közül a legfontosabb a síkbeli polárkoordináta-rendszer. Ennek bázisa az O kezdőpont (origó) és az O-ból kiinduló, skálázott T félegyenes (polártengely). A sík egy tetszőleges P pontjának a polárkoordinátái (r, α) a következők:



- r a P pont távolsága az O kezdőponttól, a vezérsugár ($0 \le r$),
- α a T polártengely és az OP félegyenes közti szög, a polárszög ($0° \le \alpha < 360°$).

A két polárkoordináta latin eredetű elnevezése: rádiusz (r) és azimut (α).

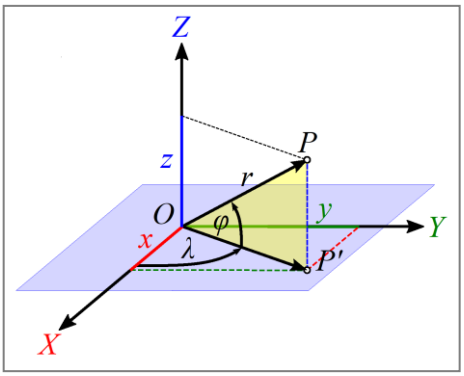
A síkbeli polárkoordináta-rendszer egyik térbeli továbbfejlesztésének tekinthető az ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer. Ennek bázisa az alapsík (horizont), az alapsíkban fekvő O kezdőpont (origó) és az O pontból kiinduló, két skálázott félegyenes (H és T), melyek közül a H merőleges a horizontra, a T pedig a horizont síkjában fekszik. Jelöljük a tér egy tetszőleges pontját P-vel, a P pont horizontra eső merőleges vetületét pedig P'-vel! Ekkor a P pont ekvatoriális gömbkoordinátái (r, λ, φ) a következők:



- r a P pont távolsága az O kezdőponttól, a vezérsugár ($0 \le r$),
- λ a T polártengely és az OP' félegyenes közti szög ($0° \le \lambda < 360°$),
- φ a horizont és az OP félegyenes közti előjeles szög ($-90° \le \varphi \le 90°$).

Az ekvatoriális gömbkoordináták latin eredetű elnevezései: rádiusz (r), azimut (λ) és deklináció (φ). A deklináció pozitív, ha a P pont a horizontnak a H félegyenessel megegyező oldalán van. Ha a P pont a horizontnak a H félegyenessel ellentétes oldalán van, akkor a deklináció negatív.

A *Descartes-féle derékszögű koordináták* és az *ekvatoriális gömbkoordináták* közti kapcsolat egyszerűen meghatározható, ha a két koordinátarendszer kezdőpontja egybeesik, a horizont az [XY] sík, továbbá a *T és H* félegyenesek az *X és Z* tengelyekkel azonos irányúak. A rajz alapján ugyanis ebben az esetben



$$x = OP' \cdot \cos(\lambda) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda),$$

$$y = OP' \cdot \sin(\lambda) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda),$$

$$x = r \cdot \sin(\varphi),$$

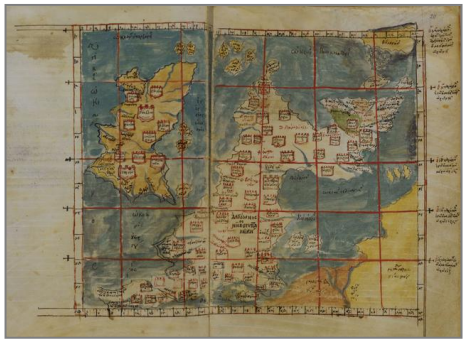
illetve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{z}{r} = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\lambda = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{ha } x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y) \cdot 90°, & \text{ha } x = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 180°, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y \ge 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - 180°, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y < 0. \end{cases}$$

Kiegészítés

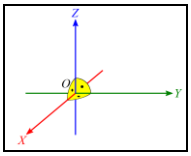
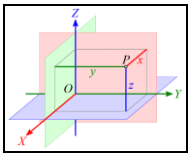
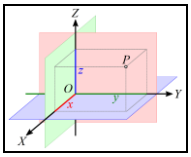
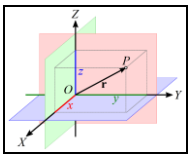
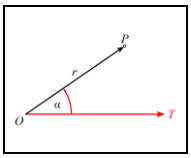
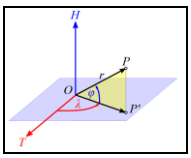
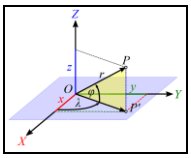


1. A koordinátarendszer gondolata az ókori görög tudósokig nyúlik vissza. *Klaudiosz Ptolemaiosz* (100 körül–170 körül) görög matematikus, csillagász, földrajztudós *Geographia* című művében már használta a földrajzi szélesség és hosszúság fogalmát. Lényegében egy Földhöz rögzített koordináta-rendszerben meghatározta mintegy 8000 földrajzi objektum (városok, folyók stb.) helyét. A fotón az egyik általa készített térkép görög nyelvű másolata látható, amely a 14. században Konstantinápolyban (Isztambulban) készült. (A fokbeosztást jelölő számokat az akkori szokásoknak megfelelően még a görög ábécé betűivel jelölték: $\alpha \to 1$, $\beta \to 2$, $\gamma \to 3$ stb.)

2. A derékszögű koordinátarendszer elterjesztésében jelentős szerepet játszott *René Descartes* (1596–1650), latinosított nevén *Renatus Cartesius* francia matematikus, fizikus, filozófus. *Geometria* című művében a koordinátarendszer segítségével már geometriai problémákat tárgyalt algebrai módszerekkel, ezzel megalapozta a matematika egyik ágát, a *koordinátageometriát*.

3. A *földrajzi koordinátarendszer* lényegében egy ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer. Ennek a rendszernek az origója a Föld középpontjában van, horizontja az *Egyenlítő* (latinul: *equator*) síkja, a *H* az Északi-sark felé, a *T* a *greenwichi délkör* és az Egyenlítő metszéspontja felé mutat. Mivel a Föld megközelítőleg gömb alakú, ezért a felszínén lévő minden pontjának vezérsugara (rádiusza) ugyanakkora, kb. 6371 km. Emiatt csak az azimutot és a deklinációt szokás megadni. A földrajzi koordináták megadásánál azonban hagyományosan az első koordináta a földrajzi szélesség (deklináció) a második pedig a földrajzi hosszúság (azimut). Például *Newton* szülőházának földrajzi koordinátái: é. sz. 52° 48′ 33.18″, ny. h. 0° 37′ 50.03″. (A képen látható Newton-szülőház helye a koordinátákra kattintva a Google térképén is megnézhető).

Képek jegyzéke

	**Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0015.svg
	**Koordináták a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0016.svg
	**Koordináták a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0017.svg
	**Helyvektor a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0018.svg
	**Síkbeli polárkoordináta-rendszer** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0019.svg
	**Ekvatoriális gömbkordináta-rendszer** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0020.svg
	**A két koordináta-rendszer kapcsolata** © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0021.svg
	Egy Ptolemaiosz-térkép 14. századi másolata koordinátákkal W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Add_19391_19-20.png

	Descartes arcképe W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg
	Newton szülőháza W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Woolsthorpe_Manor_-_west_fascade.jpg

Jelmagyarázat:

© **Jogvédett anyag**, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.

W A ***Wikimedia Commons***-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásában megadott feltételek szerint lehetséges.