

◀	Tartalom	Fogalmak	Törvények	Képletek	Lexikon	▶
---	--------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	-------------------------	---

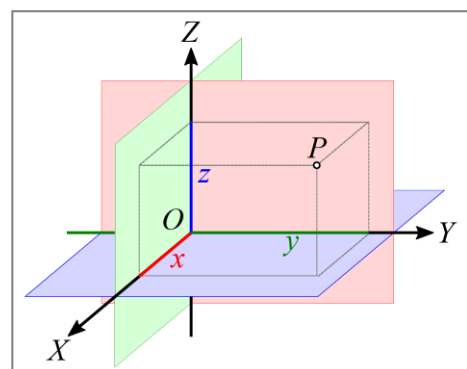
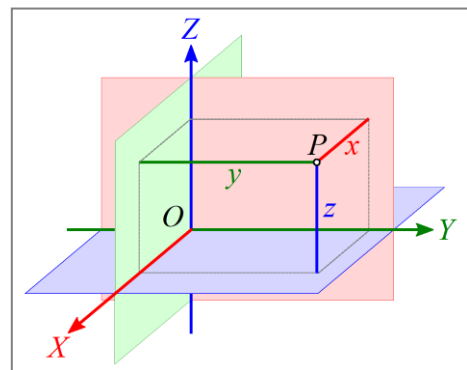
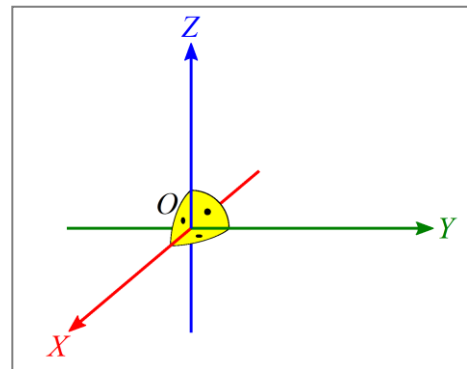
Koordináta-rendszerek

A tér pontjainak helyét megadhatjuk számokkal, amelyek bizonyos alapelemekhez (bázishoz) viszonyítva határozzák meg a pont helyét. Ezeket az alapelemek alkotják a **koordináta-rendszert**, a pont helyét megadó számokat a **koordinátáknak** nevezzük.

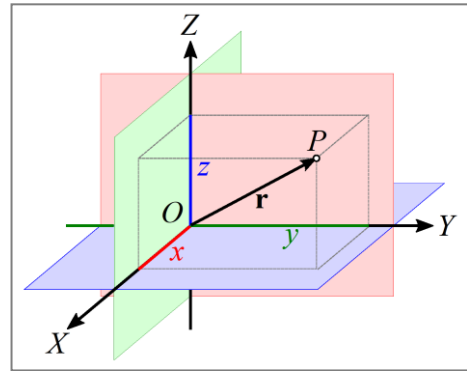
Általában a **Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert** használjuk. Ebben a bázis három egymásra merőleges, közös kezdőpontú számegeyenes: X , Y és Z . Ezeket a számegeyeneseket a koordináta-rendszer tengelyeinek, a közös kezdőpontot **origónak** nevezzük és O -val jelöljük. A *koordináta-rendszer jobbsodrású* vagy *balsodrású* lehet aszerint, hogy az origóból kiinduló, az X , Y és Z tengelyek mentén pozitív irányába mutató **\mathbf{i}** , **\mathbf{j}** és **\mathbf{k}** egységvektorok milyen vektorrendszert alkotnak. Egy tetszőleges P pont Descartes-féle koordinátáin a tengelyek által meghatározott síktól mért előjeles távolságát értjük:

- x a P pont előjeles távolsága az $[YZ]$ síktól,
- y a P pont előjeles távolsága az $[XZ]$ síktól,
- z a P pont előjeles távolsága az $[XY]$ síktól.

A koordináták latin eredetű elnevezései: **ordináta** (x), **abszcissza** (y) és **applikáta** (z). A P pont helyzete tehát három valós számból álló, rendezett számhármassal (x, y, z) adható meg. A koordinátákat rajzban gyakran a tengelyeken tüntetik fel, könnyen belátható, hogy a kétféle megadási mód egyenértékű.



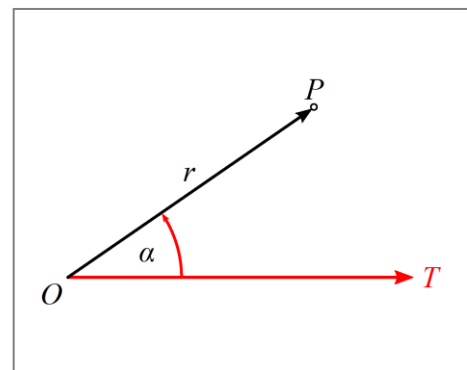
A P pont helyét a három koordinátája helyett egy olyan vektorral is megadhatjuk, amelynek a kezdőpontja az origóban van, végpontja pedig a P pont. Ezt az vektort a P pont **helyvektorának** nevezzük. A helyvektor jele általában \mathbf{r} . Egyszerűen belátható, hogy a P ponthoz tartozó helyvektor koordinátái megegyeznek a P pont koordinátaival. A Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával bizonyítható a helyvektor abszolútértéke és a koordináták közötti összefüggés:



$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Gyakran csak egyetlen sík pontjait kell leírni, vizsgálni, ilyenkor a koordináta-rendszert úgy érdemes megválasztani, hogy az $[XY]$ sík egybeessen az adott síkkal. Ekkor a sík minden pontjának a Z koordinátája 0 lesz, emiatt ez a koordináta és a Z tengely akár el is hagyható.

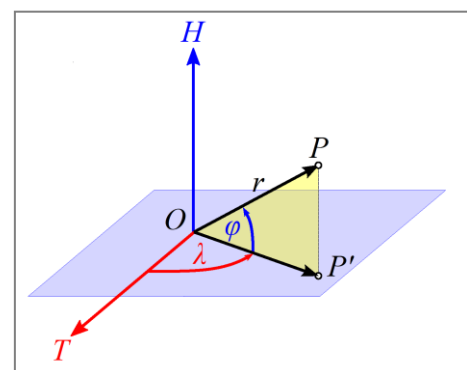
A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer mellett a sík pontjainak leírására más koordináta-rendszerek is használhatók. Ezek közül a legfontosabb a **síkbeli polárkoordináta-rendszer**. Ennek bázisa az O kezdőpont (origó) és az O -ból kiinduló, skálázott T félegyenes (polártengely). A sík egy tetszőleges P pontjának a polárkoordinátái (r, α) a következők:



- r a P pont távolsága az O kezdőponttól, a **vezérsugár** ($0 \leq r$),
- α a T polártengely és az OP félegyenes közti szög, a **polárszög** ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$).

A két polárkoordináta latin eredetű elnevezése: **rádiusz** (r) és **azimut** (α).

A síkbeli polárkoordináta-rendszer egyik térbeli továbbfejlesztésének tekinthető az **ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer**. Ennek bázisa az alapsík (horizont), az alapsíkban fekvő O kezdőpont (origó) és az O pontból kiinduló, két skálázott félegyenes (H és T), melyek közül a H merőleges a horizontra, a T pedig a horizont síkjában fekszik. Jelöljük a tér egy tetszőleges pontját P -vel, a P pont horizontra eső merőleges vetületét pedig P' -vel! Ekkor a P pont ekvatoriális gömbkoordinátái (r, λ, φ) a következők:



- r a P pont távolsága az O kezdőponttól, a vezérsugár ($0 \leq r$),
- λ a T polártengely és az OP' félegyenes közti szög ($0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$),
- φ a horizont és az OP félegyenes közti előjeles szög ($-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$).

Az ekvatoriális gömbkoordináták latin eredetű elnevezései: rádiusz (r), azimut (λ) és **deklináció** (φ). A deklináció pozitív, ha a P pont a horizontnak a H félegyenessel megegyező oldalán van. Ha a P pont a horizontnak a H félegyenessel ellentétes oldalán van, akkor a deklináció negatív.

A *Descartes-féle derékszögű koordináták* és az *ekvatoriális gömbkoordináták* közti kapcsolat egyszerűen meghatározható, ha a két koordináta-rendszer kezdőpontja egybeesik, a horizont az $[XY]$ sík, továbbá a T és H félegyenesek az X és Z tengelyekkel azonos irányúak. A rajz alapján ugyanis ebben az esetben

$$x = OP' \cdot \cos(\lambda) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda),$$

$$y = OP' \cdot \sin(\lambda) = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda),$$

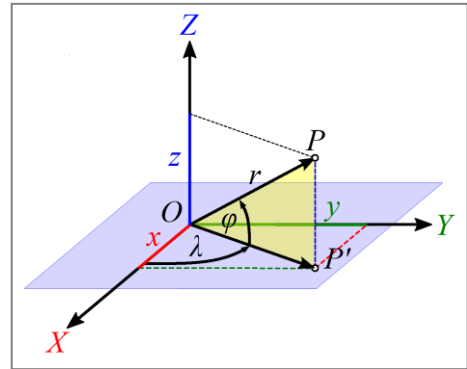
$$z = r \cdot \sin(\varphi),$$

illetve

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

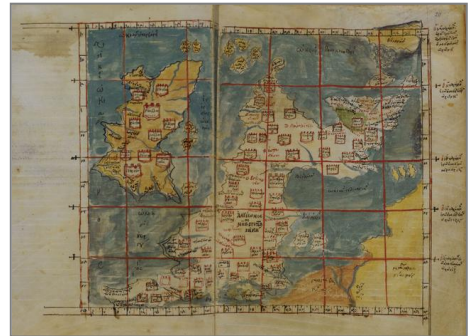
$$\varphi = \arcsin \frac{z}{r} = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\lambda = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{ha } x > 0 \\ \operatorname{sgn}(y) \cdot 90^\circ, & \text{ha } x = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 180^\circ, & \text{ha } x < 0 \text{ és } y < 0. \end{cases}$$



Kiegészítés

1. A koordinátarendszer gondolata az ókori görög tudósokig nyúlik vissza. *Klaudiosz Ptolemaiosz* (100 körül–170 körül) görög matematikus, csillagász, földrajztudós *Geographia* című művében már használta a földrajzi szélesség és hosszúság fogalmát. Lényegében egy Földhöz rögzített koordinátarendszerben meghatározta mintegy 8000 földrajzi objektum (városok, folyók stb.) helyét. A fotón az egyik általa készített térkép görög nyelvű másolata látható, amely a 14. században Konstantinápolyban (Isztambulban) készült. (A fokbeosztást jelölő számokat az akkori szokásoknak megfelelően még a görög ábécé betűivel jelölték: $\alpha \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 2$, $\gamma \rightarrow 3$ stb.)



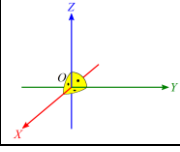
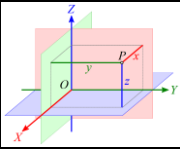
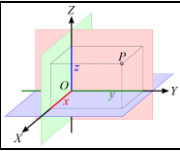
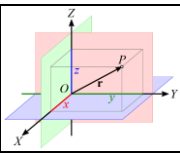
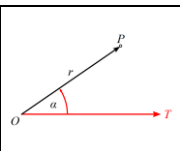
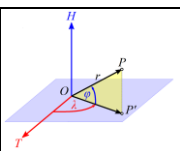
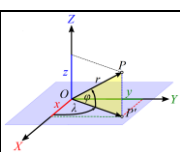

2. A derékszögű koordinátarendszer elterjesztésében jelentős szerepet játszott *René Descartes* (1596–1650), latinosított nevén *Renatus Cartesius* francia matematikus, fizikus, filozófus. *Geometria* című művében a koordinátarendszer segítségével már geometriai problémákat tárgyalt algebrai módszerekkel, ezzel megalapozta a matematika egyik ágát, a *koordinátageometriát*.



3. A *földrajzi koordinátarendszer* lényegében egy ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer. Ennek a rendszernek az origója a Föld középpontjában van, horizontja az *Egyenlítő* (latinul: *equator*) síkja, a *H* az Északi-sark felé, a *T* a *greenwichi délkör* és az Egyenlítő metszéspontja felé mutat. Mivel a Föld megközelítőleg gömb alakú, ezért a felszínén lévő minden pontjának vezérsugara (rádiusza) ugyanakkora, kb. 6371 km. Emiatt csak az azimutot és a deklinációt szokás megadni. A földrajzi koordináták megadásánál azonban hagyományosan az első koordináta a földrajzi szélesség (deklináció) a második pedig a földrajzi hosszúság (azimut). Például *Newton* szülőházának földrajzi koordinátái: **é. sz. $52^{\circ} 48' 33.18''$, ny. h. $0^{\circ} 37' 50.03''$** . (A képen látható *Newton-szülőház* helye a koordinátákra kattintva a Google térképén is megnézhető).



Képek jegyzéke

	<p>Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0015.svg</p>
	<p>Koordináták a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0016.svg</p>
	<p>Koordináták a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0017.svg</p>
	<p>Helyvektor a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0018.svg</p>
	<p>Síkbeli polárkoordináta-rendszer © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0019.svg</p>
	<p>Ekvatoriális gömbkoordináta-rendszer © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0020.svg</p>
	<p>A két koordináta-rendszer kapcsolata © http://www.fizikakonyv.hu/rajzok/0021.svg</p>
	<p>Egy Ptolemaiosz-térkép 14. századi másolata koordinátákkal W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Add_19391_19-20.png</p>

	<p>Descartes arcképe</p> <p>W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg</p>
	<p>Newton szülőháza</p> <p>W https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Woolsthorpe_Manor_-_west_fascade.jpg</p>

Jelmagyarázat:

- ©** **Jogvéde**tt anyag, felhasználása csak a szerző (és az egyéb jogtulajdonosok) írásos engedélyével.
- W** A **Wikimedia Commons**-ból származó kép, felhasználása az eredeti kép leírásának megfelelően.